アスキー-ウィルソン型積分とワイル群対称性を持つジャクソン積分との関係について (微分方程式の変形と漸近解析)

伊藤, 雅彦

数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 9-15

アスキー-ウィルソン型積分とワイル群対称性を持つジャクソン積分との関係について

青山学院大学・理工学部・数学教室　　伊藤 雅彦 (Masahiko Ito)
Department of Mathematics, Aoyama Gakuin University

以下, $0<q<1$ とし, 記号 $(x)_\infty := \prod_{i=0}^{\infty}(1-xq^i)$, $(x)_\nu := (x)_\infty/(q^\nu x)_\infty$ を使う.

1 はじめに

アスキーとウィルソンは, [AW] において, いわゆるアスキー-ウィルソン多項式のノルムの計算をするために, 以下の積分値を計算した:

命題 1.1 $|a_i|<1$ $(i=1,2,3,4)$ とする. このとき,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathbf{T}}\frac{(t^2)_\infty(t^{-2})_\infty}{\prod_{i=1}^{4}(a_it)_\infty(a_it^{-1})_\infty}\frac{dt}{t}=\frac{2\,(a_1a_2a_3a_4)_\infty}{(q)_\infty\prod_{1\le j<k\le 4}(a_ja_k)_\infty} \tag{1.1}$$

が成立. ただし, $\mathbf{T}$ を複素数平面 $\mathbf{C}$ 内の単位円周とする.

この積分を**アスキー-ウィルソン積分**と呼ぶ. この積分の被積分関数は, いわゆるアスキー-ウィルソン多項式のウェイト関数になっている. 彼らはこの積分値を計算する際に, ベイリーの very-well-poised ${}_6\psi_6$ 公式 [B] と呼ばれる以下の公式を使った:

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{(1-a^2q^{2\nu})(ab)_\nu(ac)_\nu(ad)_\nu(ae)_\nu}{(1-a^2)(qa/b)_\nu(qa/c)_\nu(qa/d)_\nu(qa/e)_\nu}\left(\frac{q}{bcde}\right)^{\nu}\\ =\;&\frac{(q)_\infty(q/a^2)_\infty(qa^2)_\infty(q/bc)_\infty(q/bd)_\infty(q/be)_\infty(q/cd)_\infty(q/ce)_\infty(q/de)_\infty}{(q/ab)_\infty(q/ac)_\infty(q/ad)_\infty(q/ae)_\infty(qa/b)_\infty(qa/c)_\infty(qa/d)_\infty(qa/e)_\infty(q/bcde)_\infty}.\end{aligned}$$

変数を適当に置き換えることによって, 上のベイリーの公式は単純計算で次の等式に書き換えられる.

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{4}(q^{1+\nu}a_i^{-1}\xi)_\infty(q^{1-\nu}a_i^{-1}\xi^{-1})_\infty}{(q^{1+2\nu}\xi^2)_\infty(q^{1-2\nu}\xi^{-2})_\infty}=\frac{(q)_\infty\prod_{1\le j<k\le 4}(qa_j^{-1}a_k^{-1})_\infty}{(qa_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1})_\infty}. \tag{1.2}$$

ただし, (1.2) の左辺は条件 $q<|a_1a_2a_3a_4|$ のもとで収束する. ここでは (1.2) の左辺を **BC_1 に対するマクドナルド型ジャクソン積分**とよぶ. この等式の特徴は, 左辺の無限級数は変数 ξ に依っているが, 右辺は ξ によらない表示になっていることである. この後でも書くが, 実は, この事実がアスキー-ウィルソン積分 (1.1) を計算するときの鍵になっている. (1.1) の左辺と (1.2) の左辺をそれぞれ $I_{BC_1}(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $M_{BC_1}(a_1,a_2,a_3,a_4;Q;\xi)$ と書くと, この２つの関係は次のように書ける:

$$\frac{I_{BC_1}(a_1,a_2,a_3,a_4)}{M_{BC_1}(a_1,a_2,a_3,a_4;Q;\xi)}=\frac{2\,\theta(a_1a_2a_3a_4)}{(q)_\infty^2\prod_{1\le j<k\le 4}\theta(a_ja_k)}. \tag{1.3}$$

ただし, $\theta(x) := (x)_\infty(q/x)_\infty$ とする (関数 $\theta(x)(q)_\infty$ はヤコビの楕円テータ関数とよばれ $\theta(x)(q)_\infty = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-x)^\nu q^{\nu(\nu-1)/2}$ と展開される. [An, GR] 参照).

さて, アスキー-ウィルソン積分とマクドナルド型ジャクソン積分はそれぞれワイル群不変な多重積分と多重級数に拡張できる. また, それら積分と級数の間には, 式 (1.3) のように, 比をとるとテータ関数の積でかける関係があることがわかった. 一般のルート系に対するワイル群不変な多重積分と多重級数の定義, 及びそれらの間のテータ関数の関係式については, 文献 [I2, I3, I4, I6] を参照してもらいたい. ここでは特に, ルート系 F_4 のワイル群に対応するアスキー-ウィルソン型積分が次のような積に表示できることを書いておく.

定理 1.2 $a_i \in \mathbf{C}$ を $|a_i| < 1$ $(i = 1, 2, 3)$ なる数とする. R は F_4 型ルート系で, 単純ルートを $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_4\}$ とする. ルート $\alpha \in R$ が $\alpha = \nu_1\alpha_1 + \cdots + \nu_4\alpha_4$ と書けるとき, $t^\alpha := t_1^{\nu_1}\cdots t_4^{\nu_4}$ のように定義すると, 以下の積分の公式が成り立つ [I5, I6]:

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^4}\int_{\mathbf{T}^4}\frac{\prod_{\alpha\in R}(t^\alpha)_\infty}{\prod\limits_{\substack{\alpha\,:\,\text{short}\\ \text{root of } F_4}}(a_1t^\alpha)_\infty(a_2t^\alpha)_\infty(a_3t^\alpha)_\infty}\frac{dt_1dt_2dt_3dt_4}{t_1t_2t_3t_4} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^7 3^2\ (a_1^6a_2^6a_3^6)_\infty}{(q)_\infty^4(a_1a_2a_3)_\infty(a_1^2a_2^2a_3^2)_\infty(a_1^3a_2^3a_3^3)_\infty}\prod_{i=1}^{3}\frac{(a_i)_\infty}{(a_i^2)_\infty}\frac{(a_i)_\infty}{(a_i^3)_\infty}\\
&\quad\times\Big[(a_1a_2)_\infty(a_2a_3)_\infty(a_1a_3)_\infty(a_1a_2^2)_\infty(a_1a_3^2)_\infty(a_2a_1^2)_\infty\\
&\quad\times(a_2a_3^2)_\infty(a_3a_1^2)_\infty(a_3a_2^2)_\infty(a_1a_2a_3^2)_\infty(a_1a_2^2a_3)_\infty(a_1^2a_2a_3)_\infty\\
&\quad\times(a_1a_2^2a_3^2)_\infty(a_1^2a_2a_3^2)_\infty(a_1^2a_2^2a_3)_\infty\Big]^{-1}
\end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{T}^4 \subset \mathbf{C}^4$ は 4 個の単位円周 $\mathbf{T}$ の直積とする.

他のルート系の場合にも対応する積分公式はあるのだが, 特に F_4 型の場合を書いたのは, F_4 の場合の公式以外は, 文献 [C1, Gu2, Gu3, Gu5, GG2] 等によって既に発見されていたからである. また, ルート系 BC_1 の場合に対応するのが, 冒頭のアスキー-ウィルソン積分 (1.1) となる.

このノートでは, ルート系が単純な BC_1 のとき, BC_1 に対するマクドナルド型ジャクソン積分を使ってアスキー-ウィルソン積分の積公式をどのように導くのかを示す. というのも, 他のルート系 R の場合でも, まったく同様の考え方でアスキー-ウィルソン型積分の積表示の公式が対応するマクドナルド型ジャクソン積分から導けるからである (定理 1.2 で述べた F_4 の場合の公式 (1.4) を証明する際も, 記号が複雑になるだけで, アイデアは同じである. 詳しくは [I6] 参照).

2 アスキー-ウィルソン積分

以下, 命題 1.1 の証明を述べる. そのために, いくつかの補題を準備する. まず

補題 2.1 関数 $\theta(x) := (x)_\infty (q/x)_\infty$ に対して, 以下が成立する：

$$\theta(qx) = -\theta(x)/x, \tag{2.1}$$

$$\theta'(1) := \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} = (q)_\infty^2, \tag{2.2}$$

$$\operatorname*{Res}_{t=C} \frac{1}{\theta(C/t)}\frac{dt}{t} = \frac{1}{\theta'(1)}, \tag{2.3}$$

任意の $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\operatorname*{Res}_{t=q^\nu a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})}\frac{dt}{t} = \operatorname*{Res}_{t=a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})}\frac{dt}{t}. \tag{2.4}$$

証明. 式 (2.1)–(2.3) は関数 $\theta(x)$ の定義による. 式 (2.1) より, 関数 $\theta(t^2)\theta(t^{-2})/\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})$ は $t \to qt$ の変換に対し不変である. 測度 dt/t も $t \to qt$ の変換で不変であるから (2.4) が言える. □

アスキー-ウィルソン積分を

$$I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbf{T}} \frac{(t^2)_\infty (t^{-2})_\infty}{\prod_{i=1}^4 (a_i t)_\infty (a_i t^{-1})_\infty} \frac{dt}{t}$$

とおく. ただし, $|a_i| < 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とする.

次に BC_1 型マクドナルド型ジャクソン積分の公式 (1.2) を使って, $I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ がみたす q-差分方程式を示す. これは, 命題 1.1 の証明をする際の鍵となるものである.

補題 2.2 アスキー-ウィルソン積分 $I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ は次の q-差分方程式を満たす：

$$I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{(1 - a_1 a_2 a_3 a_4)}{(1 - a_1 a_2)(1 - a_1 a_3)(1 - a_1 a_4)} I_{BC_1}(q a_1, a_2, a_3, a_4).$$

証明. まず $q < |a_1 a_2 a_3 a_4| < 1$ と仮定する（この仮定は後で取り除くことができる）. $|a_i| < 1$ なので, $I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ の被積分関数の極で単位円周 $\mathbf{T}$ の内部にあるものの集合は

$$\bigcup_{j=1}^4 \{q^\nu a_j \ ; \ \nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

と書ける. 以下, 積分 $I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ の留数計算をする. 公式 (1.2) の左辺を $M_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4; Q; \xi)$, 右辺を $C_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4; Q)$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
&I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbf{T}} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})} \frac{\prod_{i=1}^4 (q a_i^{-1} t)_\infty (q a_i^{-1} t^{-1})_\infty}{(qt^2)_\infty (qt^{-2})_\infty} \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{j=1}^4 \sum_{\nu=0}^\infty \operatorname*{Res}_{t=q^\nu a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})} \frac{\prod_{i=1}^4 (q a_i^{-1} t)_\infty (q a_i^{-1} t^{-1})_\infty}{(qt^2)_\infty (qt^{-2})_\infty} \frac{dt}{t}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \operatorname*{Res}_{t=a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})} \frac{dt}{t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^4 (q a_i^{-1}(q^\nu a_j))_\infty (q a_i^{-1}(q^\nu a_j)^{-1})_\infty}{(q(q^\nu a_j)^2)_\infty (q(q^\nu a_j)^{-2})_\infty} \tag{2.6}$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \operatorname*{Res}_{t=a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})} \frac{dt}{t} M_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4; Q; a_j) \tag{2.7}$$

$$= C_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4; Q) \sum_{j=1}^{4} T_j(a_1, a_2, a_3, a_4) \tag{2.8}$$

と計算できる. ただし

$$T_j(a_1, a_2, a_3, a_4) := \operatorname*{Res}_{t=a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^4 \theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})} \frac{dt}{t}.$$

上の計算で, (2.5) から (2.6) の変形には補題 2.1 の式 (2.4) を使っている. また, (2.7) から (2.8) の計算には, $q < |a_1a_2a_3a_4|$ のもとで, 公式 (1.2) を使った. いったん (2.8) が得られれば, 解析接続により $q < |a_1a_2a_3a_4| < 1$ の条件は取り除くことができる. さて, $C_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4; Q)$ の定義から

$$\frac{C_{BC_1}(qa_1, a_2, a_3, a_4; Q)}{C_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4; Q)} = \frac{(1-a_1a_2)(1-a_1a_3)(1-a_1a_4)}{a_1^2(1-a_1a_2a_3a_4)} \tag{2.9}$$

がわかる. また, 補題 2.1 の (2.1) と (2.4) を $T_j(a_1, a_2, a_3, a_4)$ に適用すると,

$$T_j(qa_1, a_2, a_3, a_4) = a_1^2\, T_j(a_1, a_2, a_3, a_4) \quad \text{for} \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.10}$$

となる. そこで, 式 (2.8) と (2.9) と (2.10) を合せると, 補題 2.2 が得られる. □

ここからは補題 2.2 を使って, 命題 1.1 の証明をする.

命題 1.1 の証明. 補題 2.2 を繰り返し使うことで,

$$I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{(a_1a_2a_3a_4)_{4N}}{\prod_{1\le j<k\le 4}(a_ja_k)_{2N}} I_{BC_1}(q^N a_1, q^N a_2, q^N a_3, q^N a_4)$$

を得る. ここで $N \to +\infty$ の極限を考えると,

$$I_{BC_1}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{(a_1a_2a_3a_4)_\infty}{\prod_{1\le j<k\le 4}(a_ja_k)_\infty} \lim_{N\to+\infty} I_{BC_1}(q^N a_1, q^N a_2, q^N a_3, q^N a_4)$$

となるが, さらに

$$\lim_{N\to+\infty} I_{BC_1}(q^N a_1, q^N a_2, q^N a_3, q^N a_4) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbf{T}} (t^2)_\infty (t^{-2})_\infty \frac{dt}{t} = \frac{2}{(q)_\infty}$$

と計算できることを考慮すると, 命題 1.1 の証明が完了する. □

系 2.3 関数 $\theta(x)$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{\theta(a_j^2)\theta(a_j^{-2})}{\prod'^{4}_{i=1}\theta(a_i a_j)\theta(a_i a_j^{-1})} = \frac{2\,\theta(a_1a_2a_3a_4)}{(q)_\infty^2 \prod_{1\le j<k\le 4}\theta(a_j a_k)}.$$

ただし, 積 $\prod'$ は $i=j$ のとき, その因子 $\theta(a_i a_j^{-1})$ を $\theta'(1)$ で置き換えるのを意味する.

証明. 補題 2.1 の (2.3) より,

$$\sum_{j=1}^{4} \operatorname*{Res}_{t=a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^{4}\theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})}\frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{4} \frac{\theta(a_j^2)\theta(a_j^{-2})}{\prod'^{4}_{i=1}\theta(a_i a_j)\theta(a_i a_j^{-1})}.$$

一方, 式 (2.8) からただちに以下がわかる:

$$\sum_{j=1}^{4} \operatorname*{Res}_{t=a_j} \frac{\theta(t^2)\theta(t^{-2})}{\prod_{i=1}^{4}\theta(a_i t)\theta(a_i t^{-1})}\frac{dt}{t} = \frac{I_{BC_1}(a_1,a_2,a_3,a_4)}{C_{BC_1}(a_1,a_2,a_3,a_4;Q)} = \frac{2\,\theta(a_1a_2a_3a_4)}{(q)_\infty^2 \prod_{1\le j<k\le 4}\theta(a_j a_k)}. \qquad \square$$

参考文献

[Ao] K. Aomoto, *On elliptic product formulas for Jackson integrals associated with reduced root systems*, J. Algebraic Combin. **8** (1998), 115–126.

[An] G. E. Andrews, *q-series : their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **66**, Washington, DC; by AMS, Providence, RI, 1986.

[AAR] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **71**, Cambrige Unversity Press, 1999.

[As] R. Askey, *Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 938–951.

[AW] R. Askey and J. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **54**, 1985.

[B] W. N. Bailey, *Series of hypergeometric type which are infinite in both directions*, Quart. J. Math. **71** (1936), 105–115

[C1] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), 191–216

[C2] ———, *Intertwining operators of double affine Hecke algebra*, Selecta Math. (N.S.) **3** (1997), 459–495.

[Ga1] F. G. Garvan, *A beta integral associated with the root system G_2*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 1462–1474.

[Ga2] ______, *A proof of the Macdonald-Morris root system conjecture for F_4*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 803–821.

[GG1] F. G. Garvan and G. Gonnet, *Macdonald's constant term conjectures for exceptional root systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1991), 343–347.

[GG2] ______, *A proof of the two parameter q-cases of the the Macdonald-Morris root system conjecture for $S(F_4)$ and $S(F_4)^\vee$ via Zeilberger's method*, J. Symbolic Comput. **14** (1992), 141–177.

[GR] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **35**, Cambrige Unversity Press, 1990.

[Gu1] R. A. Gustafson, *The Macdonald identities for affine root systems of classical type and hypergeometric series very-well-poised on semisimple Lie algebras*, Ramanujan International Symposium on Analysis (Pune, 1987), 185–224, Macmillan of India, New Delhi, 1989.

[Gu2] ______, *A generalization of Selberg's beta integral*, Bull. Amer. Math. Soc. **22** (1990), 97–105.

[Gu3] ______, *A summation theorem for hypergeometric series very-well-poised on G_2*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 510–522.

[Gu4] ______, *Some q-Beta and Mellin-Barnes intrgrals on compact Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Anal. **23** (1992), 552–561.

[Gu5] ______, *Some q-Beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey-Wilson and Nasrallah-Rahman integral*, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 441–449.

[I1] M. Ito, *On a theta product formula for Jackson integrals associated with root system of rank two*, J. Math. Anal. Appli. **216** (1997), 122–163.

[I2] ______, *Symmetry classification for Jackson integral associated with irreducible reduced root systems*, Compositio Math. **129** (2001), 325–340.

[I3] ______, *Symmetry classification for Jackson integral associated with the root system BC_n*, to appear in Compositio Math.

[I4] ______, *Convergence and asymptotic behavior of Jackson integrals associated with irreducible reduced root systems*, Preprint, 2000.

[I5] ———, *A product formula for Jackson integral associated with the root system F_4*, Ramanujan J. **6** (2002), 279–293.

[I6] ———, *Askey-Wilson type integrals associated with root systems*, Preprint, 2002.

[Ka] K. W. J. Kadell, *A proof of the q-Macdonald-Morris conjecture for BC_n*, Mem. Amer. Math. Soc. **108** , 1994.

[Ko] T. H. Koornwinder, *Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC*, Contemp. Math. **138** (1992), 189–204.

[M1] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[M2] ———, *Some conjectures for root systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 998–1007.

[M3] ———, *A formal identity for affine root systems*, Preprint, 1996.

[S1] J. V. Stokman, *On BC type basic hypergeometric orthogonal polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1527–1579.

[S2] J. V. Stokman, *Multivariable BC type Askey-Wilson polynomials with partly discrete orthogonality measure*, Ramanujan J. **1** (1997), 275–297.

[vD1] J. F. van Diejen, *Properties of some families of hypergeometric orthogonal polynomials in several variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 233–270.

[vD2] J. F. van Diejen, *On certain multiple Bailey, Rogers and Dougall type summation Formulas*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 483–508.

[vDV] J. F. van Diejen and L. Vinet, *The quantum dynamics of the compactified trigonometric Ruijsenaars–Schneider model*, Comm. Math. Phys. **197** (1998), 33–74.